

פרק שני - חקר ביצועים 2007

ענה על שתיים מהשאלות 5-8 (לכל שאלה - 25 נקודות). עליך לנמק את כל

התשובות.

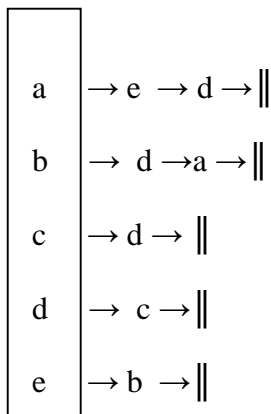
שאלה 5

א. יהי $G = (V,E)$ גרף מכוון המיוצג על ידי מטריצת הסמיכויות הבאה:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

1. שרטט את הגרף.
2. האם הגרף הנתון G הוא גרף קשיר מכוון בחזקה? אם הגרף הנתון הוא גרף קשיר מכוון בחזקה אז כתוב במחברת הבחינה - "כן", אחרת כתוב "לא".
3. כמה רכיבי קשירות חזקה - Strong Connected Component (רק "חיס) יש בגרף הנתון?

ב. יהי $G = (V,E)$ גרף מכוון המיוצג על ידי רשימת הסמיכויות הבאה:



1. שרטט את הגרף.
2. הפעל את האלגוריתם - חיפוש לעומק, $DFS(a,G)$, על הגרף הנתון החל מקדקוד a.

התבסס על הייצוג הנתון על ידי רשימת הסמיכויות.

בהפעלת האלגוריתם DFS חשב את $d[u]$ ואת $f[u]$, בעבור כל קודקוד u , כאשר $d[u]$ מציין את מועד הגילוי של הקודקוד u בעת הסריקה ו- $f[u]$ מציין את מועד סיום הטיפול בקודקוד u .

...המשך השאלה מופיע בעמוד הבא...

2.1 שרטט במחברת הבחינה רק את העץ הפורש (DFS) שמתקבל לאחר הפעלת

אלגוריתם -**חיפוש לעומק** , $DFS(a,G)$. **התבסס על הייצוג הנתון על ידי**

רשימת הסמיכויות .

2.2 העתק את הטבלה הבאה למחברת הבחינה וכתשובה עליך למלא אותה **בלבד** :

קודקוד u	a	b	c	d	e
$d[u]$					
$f[u]$					

ג. יהי $G^T = (V, E^T)$ שהינו **הגרף המוחלף** של הגרף המכוון G שבסעיף הקודם, סעיף ב'.

שים לב-קשת מכוונת כלשהי (a,b) בגרף G הופכת להיות קשת מכוונת (b,a) בגרף G^T .

1. שרטט את הגרף G^T .

2. הפעל את האלגוריתם -**חיפוש לעומק** על הגרף G^T , כאשר הלולאה הראשית של ה-DFS

סורקת את קודקודי הגרף G^T לפי הסדר. הסדר נקבע לפי מועדי הסיום $(f[u])$ בסדר

יורד, כאשר מועדי הסיום $(f[u])$ חושב בסעיף הקודם, בסעיף ב' , בגרף G .

כלומר, בהתחלה האלגוריתם המבוקש מופעל על G^T החל בקודקוד r בעל מועד הסיום

הגדול ביותר שחושב על ידי חיפוש לעומק על הגרף G בסעיף הקודם, סעיף ב' .

לאחר שהחיפוש לעומק מסיים לזהות את **רכיב קשירות חזקה** (רק "ח") של r , הוא מתחיל

בקודקוד w בעל מועד הסיום הגדול ביותר מבין הקודקודים שאינם שייכים לרק "ח" של r .

ענה החיפוש לעומק ימצא את הרכיב קשירות חזקה (רק "ח") של w , וכן הלאה.

2.1 שרטט במחברת הבחינה רק את **יער הפורש** (DFS) שמתקבל לאחר הפעלת

אלגוריתם -**חיפוש לעומק** על הגרף G^T . **יער פורש** היא סדרה של עצים פורשים

(DFS) של הגרף G^T . **הנח כי הגרף G^T מיוצג על ידי רשימת הסמיכויות**

2.2 כמה **רכיבי קשירות חזקה** – Strong Connected Component (רק "חיס") יש

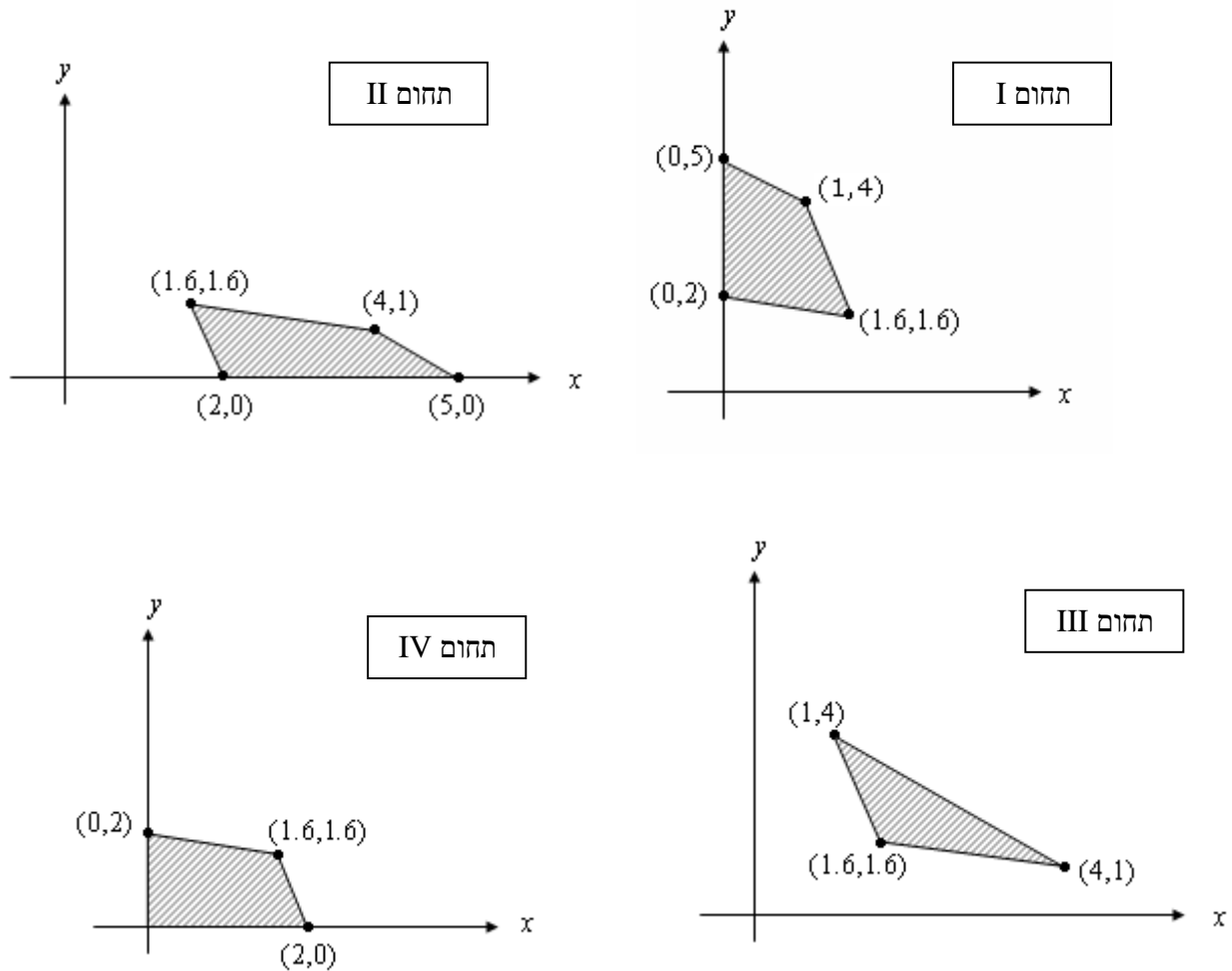
בגרף G^T ?

2.3 הסק: האם ל- G ול- G^T יש בדיוק אותם רכיבי קשירות חזקה? אם תשובתך

חיובית אז כתוב במחברת הבחינה – "כן", אחרת כתוב "לא".

שאלה 6

א. באיור א' לשאלה מתוארים ארבעה תחומים - I עד IV.



איור א' לשאלה 6

לפניך ארבע מערכות של אי-שוויונים:

מערכת 1:

$$x + y \leq 5$$

$$8x + 2y \leq 16$$

$$2x + 8y \leq 16$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

מערכת 2:

$$x + y \leq 5$$

$$8x + 2y \geq 16$$

$$2x + 8y \geq 16$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

...המשך השאלה מופיע בעמוד הבא...

מערכת 3:

$$x + y \leq 5$$

$$8x + 2y \geq 16$$

$$2x + 8y \leq 16$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

מערכת 4:

$$x + y \leq 5$$

$$8x + 2y \leq 16$$

$$2x + 8y \geq 16$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

קבע איזה תחום מבין התחומים I – IV, מתארת כל אחת מארבע המערכות. לשם כך, העתק את הטבלה שלהלן למחברת הבחינה והשלם אותה – רשום את מספר המערכת (4-1) המתאימה לכל אחד מהתחומים.

מספר התחום	מספר המערכת
I	
II	
III	
IV	

הסעיפים ב', ג' מתייחסים לבעיית התכנון ליניארית שלהלן:

$$\max \quad \{z = 16x + 12y\}$$

בכפוף לאילוצים:

$$x + y \geq 4$$

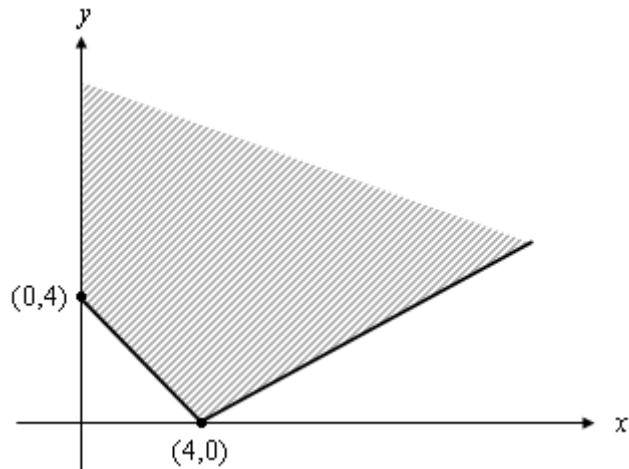
$$x - 2y \leq 4$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

...המשך השאלה מופיע בעמוד הבא...

התחום האפשרי הוא תחום אינסופי והוא מתואר באיור ב' לשאלה.



איור ב' לשאלה 6

ב. לבעיה הנתונה מוסיפים את האילוץ: $kx + 3y \leq 12$.

קבע איזה מן ההיגדים שלפניך נכון בעבור כל אחד מהערכים הבאים של k :

a. $k = 4$

b. $k = -4$

1. לבעיה יש פתרון אופטימלי יחיד

2. לבעיה יש אינסוף פתרונות אופטימליים

3. לבעיה אין פתרון אופטימלי

4. לבעיה יש פתרון לא חסום

העתק את הטבלה שלהלן למחברת הבחינה והשלם אותה - רשום את מספר ההיגד (4-1)

המתאים לכל אחד מהערכים של k .

הערך	מספר ההיגד המתאים
$k = 4$	
$k = -4$	

ג.

באילוץ $kx + 3y \leq 12$ מסעיף ב' נציב $k = 3$. פתור את הבעיה הנתונה תוך כדי התחשבות באילוץ

החדש. אם יש פתרון יחיד, מצא אותו ואת ערכה של פונקציית המטרה.

אם יש אינסוף פתרונות, רשום ביטוי לפתרון הכללי ואת ערכה של פונקציית המטרה.

אם אין פתרון, הסבר מדוע.

שאלה 7

נתונה בעיית תובלה.

נתוני הבעיה, כולל מחירי התובלה של יחידת מוצר מהמקורות ליעדים מוצגים בטבלה הבאה:

יעדים \ מקורות	A	B	C	D	היצע
א	10	0	20	11	15
ב	12	7	9	20	25
ג	0	14	16	18	5
ביקוש	5	15	15	10	45

א. מצא פתרון בסיסי התחלתי אפשרי לבעיה בשיטת "הפינה הצפון מערבית".

ב. בטבלה הבאה מוצג פתרון בסיסי אפשרי לבעיה:

יעדים \ מקורות	A	B	C	D	היצע
א		5		10	15
ב		10	15		25
ג	5			0	5
ביקוש	5	15	15	10	45

1. מלא את הטבלה הבאה, המכילה את הערכים של u_i ו- v_j , והעתק אותה.

למחברת הבחינה לאחר המילוי שלה.

$u_1 =$	$u_2 =$	$u_3 =$	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$
---------	---------	---------	---------	---------	---------

הנחיה: התחילו את החישוב עם $u_1 = 0$

2. האם הפתרון המוצג בסעיף זה הוא פתרון אופטימלי? נמק בקצרה!

...המשך השאלה מופיע בעמוד הבא...

ג. הפעם נתוני הבעיה, כולל מחירי התובלה של יחידת מוצר מהמקורות ליעדים מוצגים בטבלה

הבאה:

יעדים \ מקורות	A	B	C	D	היצע
א	10	0	20	11	15
ב	12	7	9	20	18
ג	0	14	16		5
ביקוש	5	15	15	10	

פירוש המשבצת הריקה (בשורת מקור ג' ובעמודת יעד D): לא ניתן להוביל פריטים ממקור ג' ליעד D. כמו כן יש לשים לב כי סך הביקוש שונה מסך ההיצע. בכל מקרה כדי לפתור את בעיית התובלה ברצוננו להשתמש באלגוריתם שלמדתם בהרצאה. לשם כך, שכתב את הטבלה הנתונה כך שהיא תתאים לאלגוריתם אשר פותר את בעיית התובלה. במחברת הבחינה שרטט רק את הטבלה המשוכתבת.

העתק את הטבלאות שלהלן למחברת הבחינה ובצע בהן את השינויים הנדרשים.

יעדים					
מקורות	A	B	C	D	היצע
א	10	0	20	11	15
ב	12	7	9	20	18
ג	0	14	16		5

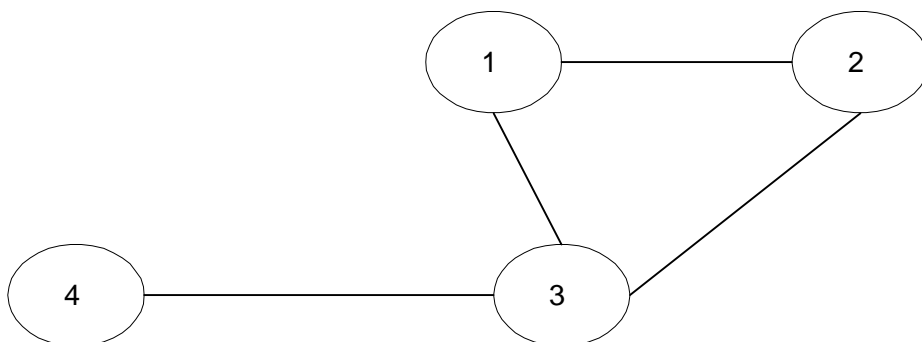
ביקוש	5	15	15	10
-------	---	----	----	----

שאלה 8

סעיפים א', ב' מתייחסים לבעיה הנתונה הבאה בתכנון לינארי:

נתון גרף $G = (V, E)$ כאשר V קבוצת הקדקודים ו- E קבוצת הצלעות.
קבוצת קדקודים $(V' \subseteq V), V'$, נקראת כיסוי קדקודים, אם כל צלע בגרף "מחוברת"
מצד אחד לפחות לקדקוד שב- V' . כלומר, אם (a, b) צלע ב- E אז a או b שייכים ל- V' .
(קבוצת הקדקודים V' "מכסה" את כל צלעות הגרף).

דוגמה:



קבוצת הקדקודים $\{2, 3\}$ מהווה כיסוי קדקודים, כיוון שהצלעות $(3,1), (2,3), (4,3)$ מחוברות לקדקוד 3, הצלע $(1,2)$ מחוברת לקדקוד 2, ואין יותר צלעות בגרף.

לפניך אלגוריתם שבעזרתו אפשר למצוא כיסוי קדקודים V' לגרף נתון $G = (V, E)$

האלגוריתם:

צעד 1: אפס את V' .

צעד 2: העתק את G ל- R .

צעד 3: אם R אינו מכיל צלעות, סיים.

צעד 4: מצא את הקדקוד בעל הדרגה הגבוהה ביותר שנמצא ב- R והוסף אותו ל- V' .

(אם יש יותר מקדקוד אחד כזה, בחר אחד כרצונך.)

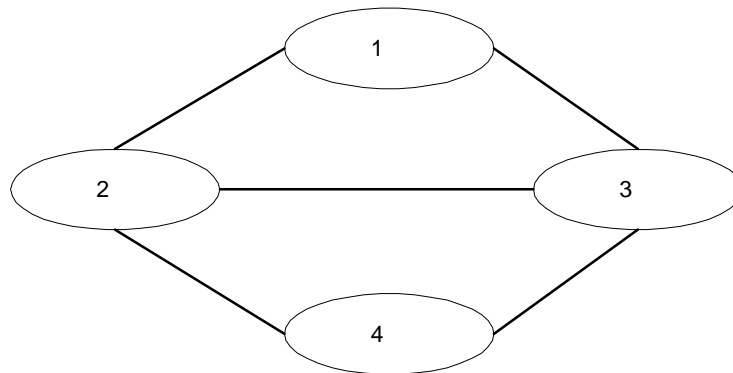
צעד 5: מחק מ- R את הקדקוד שמצאת בצעד 4 ואת כל הצלעות המחוברות אליו.

צעד 6: חזור לצעד 3.

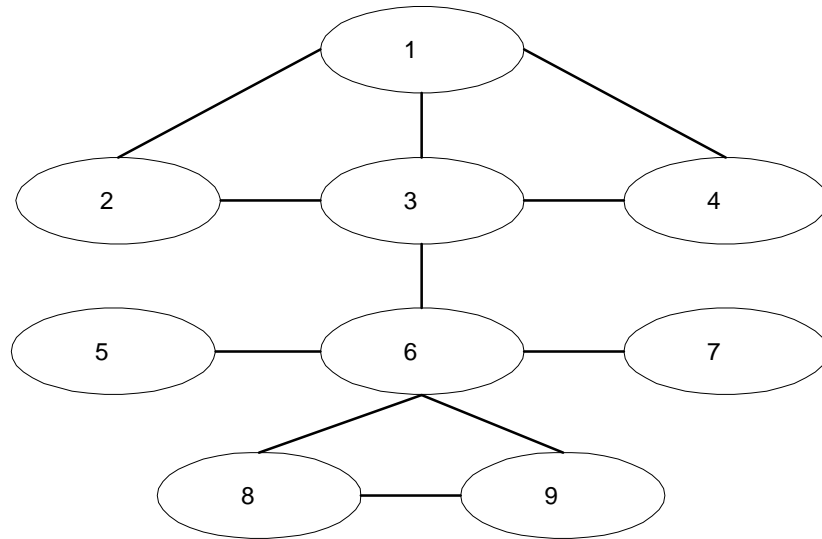
א. הפעל את האלגוריתם על כל אחד מהגרפים שלהלן ורשום בעבור כל גרף בנפרד מהו כיסוי הקדקודים שהתקבל. במחברת הבחינה העתק רק את מספר הגרף ולצידו רשום את קבוצת הקדקודים מהווה כיסוי קדקודים בעבור הגרף.

...המשך השאלה מופיע בעמוד הבא...

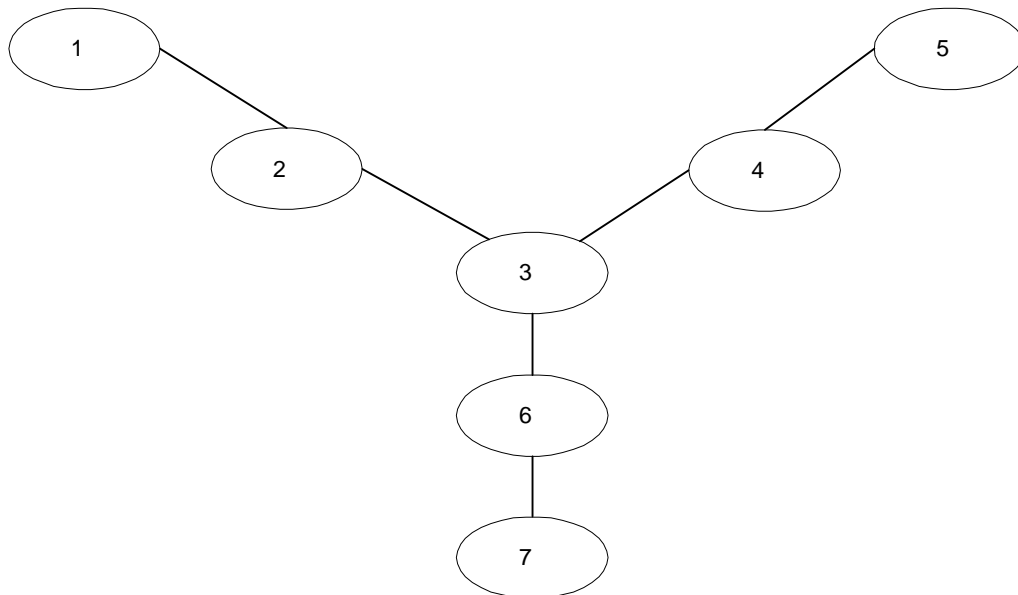
גרף 1:



גרף 2:



גרף 3:



...המשך השאלה מופיע בעמוד הבא...

ב. כיסוי קודקודים נקרא כיסוי קודקודים מינימלי, אם הוא קבוצה קטנה ביותר של קודקודים שמהווה כיסוי קודקודים.
האם האלגוריתם שהוצג מוצא כיסוי קודקודים מינימלי? נמק.

ג. לפניך 2 טענות בלתי תלויות.

קבע בעבור כל אחת מהטענות אם היא נכונה תמיד או לא.

במחברת הבחינה העתק רק את מספר הטענה ולצידו רשום את המילה "נכונה" במידה והטענה נכונה, אחרת רשום "לא נכונה".

טענה 1:

נתון גרף מכוון, $G = (V, E)$ אציקלי (גרף חסר מעגלים) ופונקציה משקל $w: E \rightarrow R^+$

כמו כן נתונים שלשה קדקודים מסוימים $s, t, z \in V$.
נתון אלגוריתם, ALG, המחזיר TRUE כאשר וכל המסלולים הקצרים ביותר (במשקל)
מקדקוד s לקדקוד t עוברים דרך הקדקוד z .
סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם ALG גדולה מזו של אלגוריתם דייקסטרה או שווה לה.

טענה 2:

נתון גרף לא מכוון, קשיר ופשוט $G = (V, E)$ ופונקציות המשקל האלה:

$$w1: E \rightarrow R^+$$

$$w2: V \rightarrow R^+$$

בהינתן מסלול p בין שני קדקודים s ו- d ב- G , משקלו של p מוגדר כסכום המשקלים של הקשתות לאורך המסלול בתוספת סכום משקלי הקדקודים לאורך המסלול.
נתון אלגוריתם, ALG, למציאת המסלול הקצר ביותר (במובן המתואר לעיל) בין קדקוד המקור s לבין כל קדקוד אחר בגרף.
סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם ALG שווה לזו של אלגוריתם דייקסטרה.

בהצלחה!