

פרק שני - חקר ביצועים

ענה על שתיים מהשאלות 5-8 (לכל שאלה - 25 נקודות).

בכל אחת מן השאלות 5-8 נתונים שישה סעיפים, א' - ו', שאינם תלויים זה בזה. בשאלות שבחרת לענות עליהן, ענה על כל הסעיפים. עליך לנמק את כל התשובות. הדבק את מדבקת הנבחן שלך במקום המיועד לכך בנספח והדק אותו למחברתך.

שאלה 5

לפניך שישה סעיפים שאינם תלויים זה בזה. ענה על כל הסעיפים. בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף, בחר את התשובה הנכונה והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח. נמק את כל תשובותיך.

הסעיפים א' , ב' מתייחסים לבעיית התכנון ליניארית שלהלן:

$$\max\{z = 15x_1 + 10x_2\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

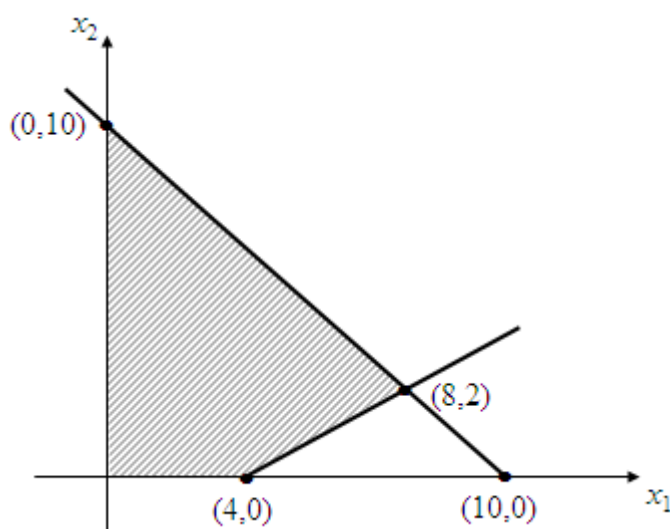
$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

התחום האפשרי עבור הבעיה הנתונה הוא:



א. פתרון אופטימלי של הבעיה הנתונה הוא :

(4, 0) (1)

(8, 2) (2)

(0, 10) (3)

(10, 0) (4)

ב. לבעיה הנתונה מוסיפים את האילוץ : $x_2 \leq 8$. הפתרון של הבעיה הנתונה יחד עם האילוץ

החדש הוא :

(4, 0) (1)

(8, 2) (2)

(2, 8) (3)

(0, 8) (4)

ג. נתונה בעיית התכנון ליניארית הבאה :

$$\min \{z = 10x_1 + 4x_2\}$$

בכפוף לאילוצים האלה :

$$x_1 + x_2 \geq 15$$

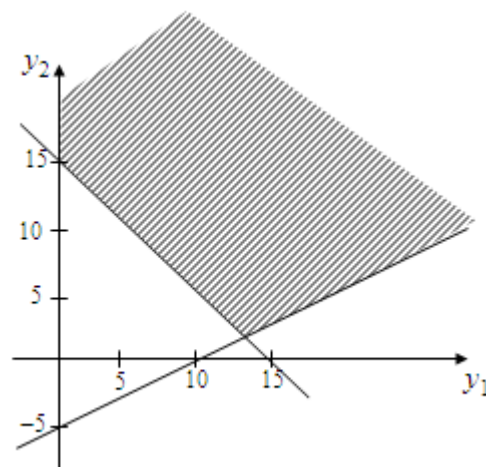
$$x_1 - 2x_2 \geq 10$$

$$x_1 \geq 0$$

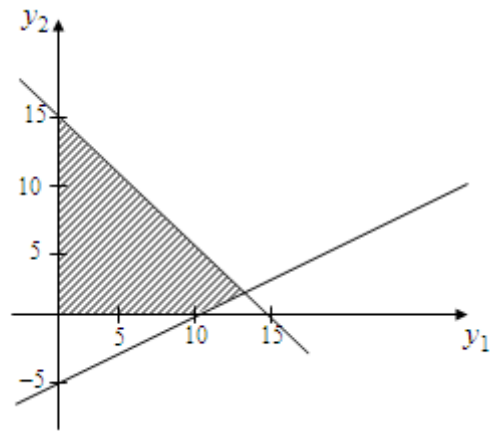
$$x_2 \geq 0$$

קבע איזה מבין התחומים 1-4 מתאר את תחום הפתרונות האפשריים בעבור הבעיה הנתונה?

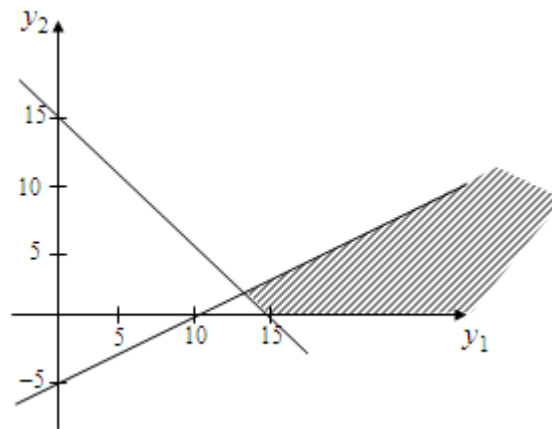
(1)



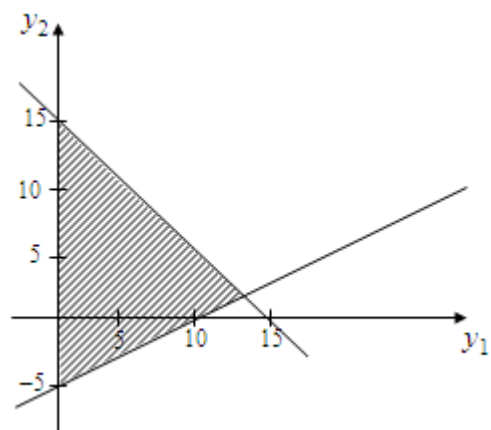
(2)



(3)



(4)



הסעיפים ד', ה', ו' מתייחסים לבעיית התכנון ליניארית שלהלן:

$$\max\{z = ax_1 + 15x_2\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

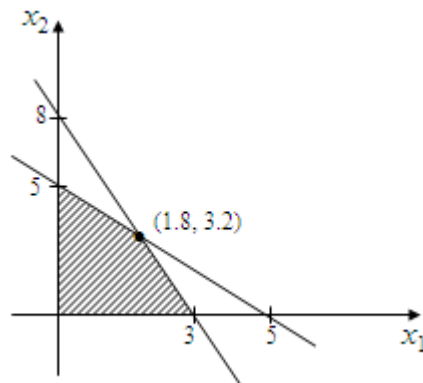
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 25$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

ד. $a > 0$ הוא פרמטר של הבעיה. התחום האפשרי עבור הבעיה הנתונה הוא:



ד. עבור $a = 30$ הפתרון האופטימלי של הבעיה הוא:

(0, 5) (1)

(1.8, 3.2) (2)

(3, 0) (3)

(4) אף אחת מבין התשובות הנתונות לא נכונה, מכיוון שישנם אינסוף פתרונות.

ה. הפתרון (1.8, 3.2) יהיה פתרון אופטימלי יחיד עבור:

$a < 15$ (1)

$a > 40$ (2)

$15 < a < 40$ (3)

$10 < a < 15$ (4)

ו. לבעיה הנתונה מוסיפים את האילוץ: $x_2 \leq 4$.

עבור $10 < a < 15$, הפתרון האופטימלי של הבעיה הנתונה יחד עם האילוץ החדש הוא:

(1.8, 3.2) (1)

(1, 4) (2)

(0, 4) (3)

(3, 0) (4)

שאלה 6

לפניך שישה סעיפים שאינם תלויים זה בזה. ענה על כל הסעיפים. בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף, בחר את התשובה הנכונה והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח.

א. בבעיית תובלה שני מקורות וארבעה יעדים. העלויות ליחידה מכל מקור לכל יעד נתונות בטבלה הבאה:

מקורות	יעדים				היצע
	1	2	3	4	
1	8	9	4	6	80
2	14	12	13	8	60
ביקוש	20	30	40	50	

כדי לקבל טבלת עלויות וביקושים מתאימה יש צורך:

- (1) להוסיף מקור דמה עם היצע 40.
- (2) אין צורך להוסיף לא מקור דמה ולא יעד דמה.
- (3) להוסיף יעד דמה עם ביקוש 100.
- (4) להוסיף יעד דמה עם ביקוש 40.

ב.

בטבלה הבאה נתון פתרון חלקי לבעיית התובלה והוא: $x_{11} = 90$, $x_{12} = 10$.

מקורות	יעדים			היצע
	1	2	3	
1	12 90	15 10	17	100
2	10	8	14	120
3	15	20	18	130
ביקוש	90	130	130	

בפתרון בסיסי אפשרי התחלתי, לפי שיטת צפון מערבית, בנוסף ל- $x_{11} = 90$, $x_{12} = 10$ נמצאים המשתנים הבאים:

$$x_{22} = 120, \quad x_{23} = 0, \quad x_{33} = 130 \quad (1)$$

$$x_{21} = 0, \quad x_{22} = 120, \quad x_{33} = 130 \quad (2)$$

$$x_{23} = 120, \quad x_{32} = 120, \quad x_{33} = 10 \quad (3)$$

(4) אי אפשר למצוא פתרון בסיסי אפשרי בשיטת הפינה הצפון מערבית.

ג. בטבלה הבאה יש לחשב את ערכם של u_1, u_3, v_1, v_3 .

מקורות	יעדים			היצע	U _i
	1	2	3		
1	12 100	15 70	17 10	180	
2	10	8 80	14	80	0
3	15	20	18 120	120	
ביקוש	100	150	130		
V _j		8			

הפתרון הנכון הוא :

$$u_1 = 0, u_3 = 18, v_1 = 12, v_3 = 17 \quad (1)$$

$$u_1 = 0, u_3 = 120, v_1 = 100, v_3 = 10 \quad (2)$$

$$u_1 = 7, u_3 = 8, v_1 = 5, v_3 = 10 \quad (3)$$

$$u_1 = 62, u_3 = 68, v_1 = 38, v_3 = -52 \quad (4)$$

ד. בטבלה הבאה נתון פתרון לבעיית תובלה :

מקורות	יעדים			היצע	U _i
	1	2	3		
1	12	15 150	17 30	180	
2	10 80	8	14	80	
3	15 20	20	18 100	120	
ביקוש	100	150	130		
V _j					

איזה מן ההיגדים הבאים נכון :

(1) הפתרון הנתון איננו פתרון בסיסי.

(2) הפתרון הנתון הוא פתרון אופטימלי.

(3) הפתרון הנתון הוא פתרון בסיסי לא אופטימלי.

(4) הפתרון הנתון הוא פתרון לא אפשרי.

ה.

נתונה בעיית התובלה.

נתוני הבעיה, כולל מחירי התובלה של יחידת מוצר מהמקורות ליעדים מוצגים בטבלה הבאה:

מקורות	יעדים			היצע
	1	2	3	
1	12	15		100
2	10	8	14	120
3	15	20	18	130
ביקוש	90	130	130	

ממקור 1 אסור לספק ליעד 3. העלות c_{13} צריכה להיות:

- (1) 0
- (2) 20
- (3) M (מספר מאוד גדול)
- (4) 100

ו. נתוני הבעיה, כולל מחירי התובלה של יחידת מוצר מהמקורות ליעדים מוצגים בטבלה

הבאה:

יעדים \ מקורות	מקורות				היצע
	A	B	C	D	
א	10	0	20	11	15
ב	12	7	9	20	18
ג	0	14	16	10	5
ביקוש	5	15	15	10	

כדי לקבל טבלת עלויות וביקושים מתאימה:

- (1) יש צורך להוסיף מקור דמה עם היצע 7 ומחירי התובלה של יחידת מוצר מהמקור הדמה לכל יעד יהיה M (מספר מאוד גדול).
- (2) אין צורך להוסיף לא מקור דמה ולא יעד דמה.
- (3) יש צורך להוסיף מקור דמה עם היצע 7 ומחירי התובלה של יחידת מוצר מהמקור הדמה לכל יעד יהיה 0.
- (4) יש צורך להוסיף יעד דמה עם ביקוש שלילי.

שאלה 7

לפניך שישה סעיפים שאינם תלויים זה בזה. ענה על כל הסעיפים. בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף, בחר את התשובה הנכונה והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח.

א. יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון המיוצג על ידי מטריצת הסמיכויות הבאה:

$$\begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כמה רכיבי קשירות חזקה – Strong Connected Component (רק "חיס) יש בגרף הנתון?

4 (1)

5 (2)

2 (3)

1 (4)

הסעיפים ב', ג', ד' מתייחסים לבעיה הבאה:

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון המיוצג על ידי רשימת סמיכויות. לפניך תיאור חלקי של אלגוריתם בעברית מבנית אשר בודק אם בגרף הנתון יש מעגל. הערה - הפלט היחיד של האלגוריתם הוא: קיים מעגל או לא קיים מעגל.

... המשך השאלה בעמוד הבא

תיאור האלגוריתם

1. הפעל את אלגוריתם _____ (1) על הגרף G .
2. אם במהלך ביצועו האלגוריתם נתקל בקשת (u,v) _____ (2) , אזי האלגוריתם נעצר ומודיע שבגרף G קיים מעגל.
3. אחרת, האלגוריתם ממשיך עד לסיום משימתו המקורית, ומודיע שבגרף G אין מעגל.

באלגוריתם הושמטו שני ביטויים המסומנים במספרים בין סוגריים עגולים. התשובה הנכונה עבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעים בסעיפים ב' ו-ג' :

ב. התשובה הנכונה עבור ביטוי (1) לעיל היא :

(1) . מציאת המסלול הקצר ביותר

(2) . BFS

(3) . DFS

(4) . למצוא את הרק "חיס".

ג. התשובה הנכונה עבור ביטוי (2) לעיל היא :

(1) בעלת משקל מינימלי

(2) שנבדקת לראשונה ו- v צבוע באפור

(3) שנבדקת לראשונה ו- v צבוע בלבן

(4) שנבדקת לראשונה ו- v צבוע בשחור

ד.

סבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון הינה :

(1) ליניארית כפונקציה של גודל הקלט.

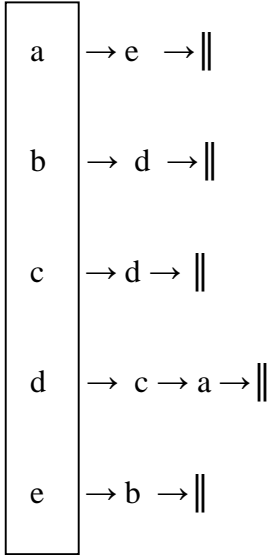
(2) ריבועית כפונקציה של גודל הקלט.

(3) לוגריתמית כפונקציה של גודל הקלט.

(4) אף אחת מבין התשובות הנתונות איננה נכונה.

הסעיפים ה' ו' מתייחסים לגרף שלהלן:

יהי $G = (V,E)$ גרף מכוון המיוצג על ידי רשימת הסמיכויות הבאה:



ה. הפעל את האלגוריתם -חיפוש לעומק , $DFS(a,G)$, על הגרף הנתון החל מקדקוד a .

התבסס על הייצוג הנתון על ידי רשימת הסמיכויות .

אם $f[7]$ מציין את מועד סיום הטיפול בקודקוד 7 אז מהו הערך של $f[7]$?

- (1) 5
- (2) 7
- (3) 9
- (4) 6

ו. לפניך הגדרה חדשה:

גרף דו-צדדי – (bipartite graph) הינו גרף $G = (V,E)$ שבו קבוצת הקודקודים מתחלקת לשתי קבוצות זרות, $V = V_1 \cup V_2$ כך ש: V_1 ו- V_2 קבוצות זרות באופן שאם $x, y \in V_1$ או $x, y \in V_2$ אז לא קיימת קשת בין x ו- y . נהוג לסמן גרף דו-צדדי על ידי $G = (V_1, V_2, E)$.

מהו ההיגד הנכון מבין ההיגדים הבאים:

- (1) הגרף הנתון איננו גרף דו-צדדי.
- (2) הגרף הנתון הוא גרף דו צדדי , $V_1=\{a,b,c\}$ $V_2=\{d,e\}$, ומכיל מעגל פשוט באורך אי-זוגי.
- (3) הגרף הנתון הוא גרף דו צדדי, $V_1=\{a,b,c\}$ $V_2=\{d,e\}$, ומכיל מעגל פשוט באורך זוגי.
- (4) הגרף הנתון הוא גרף דו צדדי, $V_1=\{b,c\}$ $V_2=\{a,d,e\}$, ומכיל מעגל פשוט באורך זוגי.

שאלה 8

לפניך שישה סעיפים שאינם תלויים זה בזה. ענה על כל הסעיפים. בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף, בחר את התשובה הנכונה והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח.

הסעיפים א', ב', ג', ד' מתייחסים לבעיה הבאה:

נתון גרף לא מכוון, קשיר ופשוט $G = (V, E)$ ופונקציה משקל $w : E \rightarrow R^+$ כמו כן נתונים שני קדקודים מסוימים $s, t \in V$ וקשת מסוימת $e \in E$. לפניך אלגוריתם המחזיר TRUE במידה וכל המסלולים הקצרים ביותר (במשקל) מקדקוד s לקדקוד t עוברים דרך הקשת e .

אלגוריתם:

1. נפעיל את אלגוריתם דייקסטרה על הגרף G
2. נסמן ב- M_1 את משקל המסלול הקצר ביותר מ- s ל- t
3. נבנה גרף חדש $G_1 = (V_1, E_1)$ שבו (1) _____
4. נפעיל את האלגוריתם (2) _____ על הגרף G_2
5. נסמן ב- M_2 את משקל המסלול הקצר ביותר מ- s ל- t ב- G_1
6. אם (3) _____ אזי החזר TRUE
אחרת החזר FALSE

באלגוריתם הנ"ל חסרים שלושה ביטויים המסומנים במספרים בין סוגריים עגולים. התשובה הנכונה עבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעה בשאלות הבאות:

- א. התשובה הנכונה עבור ביטוי (1) לעיל היא:
- (1) $E_1 = E - V_1$ = קבוצת כל הקדקודים שב- V פרט לקדקודים הנוגעים בקשת e .
 - (2) $E_1 = E - \{e\}$ = קבוצת כל הקדקודים שב- V פרט לקדקודים הנוגעים בקשת e .
 - (3) $V_1 = V - \{e\}$.
 - (4) אף אחת מהתשובות הנתונות איננה נכונה.
- ב. התשובה הנכונה עבור ביטוי (2) לעיל היא:
- (1) DFS על G_1 מקדקוד s
 - (2) דייקסטרה על G_1
 - (3) BFS על G_1 מקדקוד s
 - (4) אף אחת מהתשובות הנתונות איננה נכונה

ג. התשובה הנכונה עבור ביטוי (3) לעיל היא :

$$(1) \quad M_2 > M_1$$

$$(2) \quad M_2 \geq M_1$$

$$(3) \quad M_2 = M_1$$

$$(4) \quad M_2 \leq M_1$$

ד. סבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון הינה :

(1) ליניארית כפונקציה של גודל הקלט.

(2) כסיבוכיות זמן הריצה של דייקסטר.

(3) לוגריתמית כפונקציה של גודל הקלט.

(4) אף אחת מבין התשובות הנתונות איננה נכונה.

ה. לפניך 2 טענות בלתי תלויות.

נתון גרף לא מכוון, $G = (V, E)$ ופונקצית משקל $w : E \rightarrow R$

כמו כן נתונים שלשה קדקודים מסוימים $s, t, z \in V$.

נתון אלגוריתם, ALG1, המחזיר TRUE כאשר וכל המסלולים הקצרים ביותר (במשקל)

מקדקוד s לקדקוד t עוברים דרך הקדקוד z .

תלמיד א' טוען : סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם ALG1 גדולה מזו של אלגוריתם דייקסטר או שווה לה.

נתון גרף לא מכוון, קשיר ופשוט $G = (V, E)$ ופונקציות המשקל האלה :

$$w1 : E \rightarrow R$$

$$w2 : V \rightarrow R^+$$

בהינתן מסלול p בין שני קדקודים s ו- d ב- G , משקלו של p מוגדר כסכום המשקלים של

הקשתות לאורך המסלול בתוספת סכום משקלי הקדקודים לאורך המסלול.

נתון אלגוריתם, ALG2, למציאת המסלול הקצר ביותר (במובן המתואר לעיל) בין קדקוד

המקור s לבין כל קדקוד אחר בגרף.

תלמיד ב' טוען : סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם ALG2 שווה לזו של אלגוריתם דייקסטר.

מבין שני התלמידים מי צודק?

(1) שניהם צודקים.

(2) שניהם טועים.

(3) תלמיד א' צודק ותלמיד ב' לא צודק.

(4) תלמיד א' לא צודק ותלמיד ב' צודק.

לפניך הגדרה חדשה: גשר בגרף לא מכוון היא קשת שהסרתה מנתקת את רכיבי הקשירות שלה.

מהי הטענה שאיננה נכונה?

- (1) קשת אינה גשר בגרף לא מכוון קשיר ופשוט אם ורק אם היא נמצאת על מעגל פשוט בגרף.
- (2) גרף לא מכוון וקשיר ניתן לכיוון לגרף קשיר בחוזקה אם ורק אם אין בו גשרים.
- (3) קשת בגרף מכוון היא גשר אם ורק אם הקצוות שלה נמצאים ברכיבי קשירות חזקה שונים.
- (4) אף אחת מבין התשובות הנתונות איננה נכונה.

בהצלחה!